Osječki matematički list 17 (2017), 1-29

Vjerojatnosna lema o regularnosti i njezine primjene u kombinatorici

Filip Bosnić*, Vjekoslav Kovač†

Sažetak

Ovaj rad započinje s dva poznata teorema aditivne kombinatorike, koji su potom svedeni na rezultat iz teorije grafova. Daljnje poopćenje je iskazano jezikom teorije vjerojatnosti, kako bi ga se dokazalo korištenjem vjerojatnosne varijante Szemerédijeve leme o regularnosti. Ta lema daje dekompoziciju proizvoljne slučajne varijable na strukturirani dio, pseudoslučajni dio i grešku, a u radu je iznesen njezin potpuni dokaz.

Ključne riječi: *aritmetička progresija, Rothov teorem, ugao, neusmjereni graf, pseudoslučajnost, uvjetno očekivanje.*

Probabilistic regularity lemma and its applications in combinatorics

Abstract

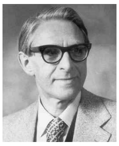
This paper begins with two well-known theorems from additive combinatorics, which are then reduced to a result from graph theory. A further generalization is formulated in the language of probability theory, in order to be established using the probabilistic variant of the Szemerédi regularity lemma. This lemma provides a decomposition of an arbitrary random variable into a structured part, a pseudorandom part, and an error, and the paper presents its complete proof.

Keywords: *arithmetic progression, Roth's theorem, corner, undirected graph, pseudorandomness, conditional expectation.*

*Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, email: fbosnic@math.uni-bielefeld.de
†Matematički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, email: vjekovac@math.hr

1 Nekoliko rezultata iz aditivne kombinatorike

Jedan od ciljeva ovog članka je pokazati kako matematičko istraživanje ponekad prirodno vodi od elementarnih koncepata prema njihovim dalekosežnim poopćenjima. U ovom odjeljku krenut ćemo od dva poznata rezultata tzv. *aditivne kombinatorike*, koja se bavi kombinatornim aspektima podskupova neke (komutativne) grupe, poput skupa cijelih brojeva uz uobičajeno zbrajanje. Potom ćemo ih dobiti kao posebne slučajeve jednog rezultata iz teorije grafova, u čijem iskazu se više uopće neće pojavljivati operacija zbrajanja. Dokaz tako poopćenog rezultata ostavit ćemo za iduće odjeljke, gdje će nam se uklopiti u razmatranja o dihotomiji strukturiranosti i pseudoslučajnosti.



Klaus Friedrich Roth (1925.-2015.), britanski matematičar koji se bavio kombinatorikom i teorijom brojeva, dobitnik Fieldsove medalje 1958. godine i Sylvesterove medalje 1991. godine.

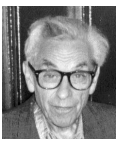
1.1 Rothov teorem o aritmetičkim progresijama

U ovom radu ćemo skup cijelih brojeva označavati sa $\mathbb{Z}$, a skup prirodnih brojeva (koji ne uključuje 0) s $\mathbb{N}$. Nadalje, *aritmetička progresija*[1] će nam uvijek biti uređena k-torka brojeva

$$(a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+(k-1)d)$$

za neke $a, d \in \mathbb{Z}$ i $k \in \mathbb{N}$. Broj k je tada *duljina* aritmetičke progresije, a ukoliko je $d = 0$, reći ćemo da je riječ o *trivijalnoj* aritmetičkoj progresiji. *Broj elemenata* (tj. *kardinalitet*) konačnog skupa A pisat ćemo $|A|$.

Sljedeći rezultat se često smatra jednim od najvećih doprinosa kombinatorici skupa cijelih brojeva. On je preteča čitave serije tvrdnji koje govore da u svakom dovoljno gustom (pa makar i vrlo nepravilnom) podskupu od $\mathbb{Z}$ možemo pronaći razne pravilne uzorke. Prvi ga je dokazao K. F. Roth 1953. godine u radu [8] i time dao djelomični odgovor na pitanje P. Erdősa i P. Turána [4].



Paul Erdős (1913.-1996.), mađarski matematičar, bio je jedan od najplodnijih, najsvestranijih i najpoznatijih matematičara 20. stoljeća, dobitnik Coleove nagrade 1951. godine i Wolfove nagrade 1983./1984. godine.

Teorem 1.1. *(Rothov teorem, slabija varijanta)* Za svaki $0 < \delta \leq 1$ postoji $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ sa sljedećim svojstvom: ako je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0(\delta)$ i ako skup $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ ima kardinalitet $|A| \geq \delta n$, tada A mora sadržavati netrivijalnu aritmetičku progresiju duljine 3.

Omjer $|A|/n$ je prirodno zvati *gustoća* skupa A obzirom na $\{1, 2, \ldots, n\}$. Zato teorem možemo izreći riječima: *Svaki skup gustoće barem $\delta > 0$ u dovoljno velikom (ovisno o δ) intervalu prirodnih brojeva ima tri različita elementa koji stoje u aritmetičkoj progresiji.*

[1] Ovaj termin se preferira u literaturi (poput knjige [19]) naspram termina *aritmetički niz* kako bi se naglasilo da je riječ o *konačnom* slijedu brojeva.

Uslijedila su brojna kvantitativna poboljšanja i poopćenja teorema 1.1. Prije svega napomenimo kako ćemo mi zapravo pokazati da skup A iz iskaza mora sadržavati barem $\alpha(\delta)n^2$ aritmetičkih progresija duljine 3, za neku konstantu $\alpha(\delta) > 0$ koja ovisi samo o δ. Ovo pojačanje je prvi primijetio P. Varnavides [20].

Teorem 1.2. *(Rothov teorem, jača varijanta)* Za svaki $0 < \delta \leq 1$ postoji $\alpha(\delta) > 0$ sa sljedećim svojstvom: ako je $n \in \mathbb{N}$ i ako za $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ vrijedi $|A| \geq \delta n$, tada A ima barem $\alpha(\delta)n^2$ aritmetičkih progresija duljine 3.

Primijetimo da teorem 1.2 povlači teorem 1.1. Jednom kad dokažemo drugi teorem, tada ćemo za $n_0(\delta)$ iz iskaza prvog teorema moći uzeti najmanji prirodni broj veći od $1/\alpha(\delta)$. Naime, u skupu A postoji $|A| \leq n$ trivijalnih aritmetičkih progresija duljine 3 pa $\alpha(\delta)n^2 > n$ garantira da A sadrži i barem jednu takvu netrivijalnu progresiju. Preporučujemo čitatelju da za vježbu pokuša dokazati i obratnu implikaciju, tj. izvesti jaču varijantu iz slabije.

Zadatak 1.1. Izvedite teorem 1.2 iz teorema 1.1.

Zadatak 1.1 je nešto teži pa dajemo uputu. Korisno je promatrati netrivijalne aritmetičke progresije u skupu $\{1, 2, \ldots, n\}$ duljine k takve da je $k \geq n_0(\delta/2)$ i $k \geq 10$. Potom treba svaku od njih afino preslikati u skup $\{1, 2, \ldots, k\}$, tako da se unutar nje teorem 1.1 može primijeniti uz $\delta/2$ i k umjesto δ i n. Uzmemo li skup A gustoće najmanje δ, treba primijetiti kako barem $(\delta n/k^2)(\delta n/4)$ takvih progresija ima barem $(\delta/2)k$ zajedničkih elemenata sa skupom A; detalji se mogu naći u [20].

Nadalje, prirodno je pokušati odozgo ocijeniti broj

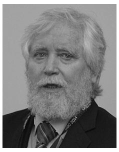
$$\begin{aligned} r(n) := {} & \text{kardinalitet najvećeg podskupa od } \{1, 2, \ldots, n\} \\ & \text{koji ne sadrži netrivijalnu aritmetičku progresiju duljine 3.} \end{aligned}$$

Naime, iz teorema 1.1 slijedi samo $\lim_{n\to\infty} r(n)/n = 0$ (dokažite to!), ali pažljivom analizom Rothovog dokaza može se dobiti $r(n) \leq Cn/\ln\ln n$ za neku konstantu $C > 0$ i za sve dovoljno velike $n \in \mathbb{N}$. Trenutni rekord drži T. F. Bloom [2] s ocjenom

$$r(n) \leq \frac{Cn(\ln\ln n)^4}{\ln n},$$

a za vrijeme pisanja ovog članka T. F. Bloom i O. Sisask najavili su ocjenu oblika $r(n) \leq Cn/(\ln n)^{1+\varepsilon}$ za neki $\varepsilon > 0$, koju je P. Erdős još davno postavio kao izazovni otvoreni problem.

S druge strane, P. Erdős i P. Turán [4] su još 1936. naslutili da analogni rezultat vrijedi i za aritmetičke progresije duljine $k \geq 4$. Proteklo je dosta vremena dok je E. Szemerédi to potvrdio za $k = 4$, a potom i za općeniti fiksirani k u svom radu [14] 1975. godine.



Endre Szemerédi (1940.), mađarsko-američki matematičar koji se najviše bavi kombinatorikom, dobitnik Pólyine nagrade 1975. godine, Steeleove nagrade 2008. godine i Abelove nagrade 2012. godine.

Čitatelju ostavljamo da iz teorema 1.1 izvede još jednu varijantu koja se često pojavljuje u literaturi.

Zadatak 1.2. Neka je A podskup skupa prirodnih brojeva s pozitivnom asimptotskom gornjom gustoćom, tj.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1,2,\ldots,n\}|}{n} > 0.$$

Dokažite da tada A sadrži netrivijalnu aritmetičku progresiju duljine 3.

Navedena formula definira *asimptotsku gornju gustoću* skupa $A \subseteq \mathbb{N}$, dok je njegova *(asimptotska) gustoća* varijanta te definicije s uobičajenim limesom kada $n \to \infty$. Prednost limesa superiora je što on uvijek postoji, čak i kad niz ne konvergira, a u našem slučaju je on broj iz intervala $[0,1]$.

Ben Joseph Green (1977.), britanski matematičar koji se najviše bavi kombinatorikom i teorijom brojeva, dobitnik Salemove nagrade 2005. godine, nagrade Europskog matematičkog društva 2008. godine i Sylvesterove medalje 2014. godine.

Tako je naprimjer gustoća skupa neparnih brojeva jednaka $1/2$, dok je gustoća skupa prostih brojeva jednaka 0: premda prostih brojeva ima beskonačno mnogo, prilično su rijetki. Ipak, skup prostih brojeva sadrži aritmetičku progresiju $3,5,7$, a čitatelj će lako provjeriti da se aritmetičke progresije $5,11,17,23,29$ i $7,37,67,97,127,157$ također sastoje samo od prostih brojeva. Štoviše, B. J. Green i T. Tao [6] su uspjeli pokazati da skup prostih brojeva sadrži po volji duge aritmetičke progresije, čime je potvrdno odgovoreno na višestoljetnu hipotezu brojnih matematičara poput J.-L. Lagrangea i E. Waringa. Dakle, dovoljni uvjet iz zadatka 1.2 nije i nužan za postojanje po volji dugih aritmetičkih progresija.

1.2 Teorem o uglovima

U ovom poglavlju promatrat ćemo podskupove Kartezijevog kvadrata

$$\{1,2,\ldots,n\}^2 = \{1,2,\ldots,n\} \times \{1,2,\ldots,n\}.$$

Terence Tao (1975.), svestrani australsko-američki matematičar, dobitnik Salemove nagrade 2000. godine, Fieldsove medalje 2006. godine, Pólyine nagrade 2010. godine i brojnih drugih priznanja.

Umjesto aritmetičke progresije, uzorak kojeg želimo pronaći je tzv. netrivijalni ugao. Pritom *ugao*[2] definiramo kao uređenu trojku parova

$$\big((a,b),\ (a+d,b),\ (a,b+d)\big)$$

za neke $a,b,d \in \mathbb{Z}$, a kažemo da je *trivijalan* kada je $d = 0$. Naredni teorem prvi su dokazali M. Ajtai i E. Szemerédi [1] 1974. godine.

[2] Ovaj termin koristi Škredov u radu [16] i od tada se on uvriježio u literaturi iz aditivne kombinatorike.

Teorem 1.3. *(O uglovima)* Za svaki $0 < \delta \leq 1$ postoji $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ sa sljedećim svojstvom: ako je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0(\delta)$ i ako skup $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}^2$ ima kardinalitet $|A| \geq \delta n^2$, tada A mora sadržavati netrivijalni ugao.

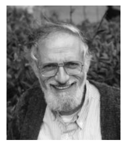
I ovdje ima smisla promatrati niz definiran s

$$\begin{aligned} u(n) := {} & \text{kardinalitet najvećeg podskupa od } \{1, 2, \ldots, n\}^2 \\ & \text{koji ne sadrži netrivijalni ugao.} \end{aligned}$$

Iz teorema 1.3 slijedi da niz s općim članom $u(n)/n^2$ konvergira prema 0. Pomalo začuđuje da je bilo kakva netrivijalna i razumna kvantitativna ocjena broja $u(n)$ dugo bila otvoreni problem. Tek je 2004. godine I. D. Škredov dao prvu takvu nejednakost, koju je potom u radu [16] optimizirao do oblika

$$u(n) \leq \frac{Cn^2}{(\ln \ln n)^c}$$

za neke konstante $c, C > 0$. Opet se prirodno postavlja i pitanje poopćenja na višedimenzionalne uglove, koje su dokazali H. Furstenberg i Y. Katznelson [5] krajnje nekonstruktivnim tehnikama tzv. ergodičke teorije.



Hillel Furstenberg (1935.), američko-izraelski matematičar koji primjenjuje teoriju vjerojatnosti u drugim granama matematike, dobitnik Wolfove nagrade 2006./2007. godine.

Premda će oba dosad spomenuta teorema biti zajednička posljedica općenitije formulirane tvrdnje o grafovima, sugeriramo čitatelju da pokuša pokazati kako je drugi teorem zapravo jači od prvog.

Zadatak 1.3. Izvedite teorem 1.1 iz teorema 1.3.

Jedna moguća uputa za zadatak 1.3 je krenuti od $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ i definirati

$$\widetilde{A} := \big\{(a, b) \in \{1, 2, \ldots, 2n\}^2 \,:\, b - a \in A\big\}.$$

Primijetite da svaki netrivijalni ugao u skupu $\widetilde{A}$ putem projekcije $(a, b) \mapsto b - a$ daje netrivijalnu aritmetičku progresiju duljine 3 u skupu A.

1.3 Lema o uklanjanju trokutâ

Za formulaciju rezultata koji slijedi potrebno je poznavati najosnovnije pojmove teorije grafova. *Jednostavni neusmjereni graf*, ili kratko samo *graf*, $G = (V, E)$ sastoji se od konačnog skupa vrhova V i skupa bridova E. Svaki brid $e \in E$ je dvočlani skup $e = \{u, v\}$ elemenata iz V, a mi slikovito kažemo da brid *e spaja* vrhove u i v. *Trokut* u grafu G je svaki tročlani skup vrhova iz V takav da su svaka dva od tih vrhova spojena bridom.

Lema 1.1. (O uklanjanju trokutâ) *Za svaki $\delta > 0$ postoji konstanta $\beta(\delta) > 0$ takva da vrijedi sljedeće: ako je G graf s n vrhova koji sadrži manje od $\beta(\delta)n^3$ trokutâ, tada možemo ukloniti manje od δn^2 njegovih bridova i dobiti graf koji ne sadrži nijedan trokut.*

Ovaj rezultat se obično zove *lema o uklanjanju trokutâ*, zbog njezinih brojnih primjena, premda je zanimljiva već i sama za sebe. Vrlo neformalno možemo ju izreći: *Ako graf ima relativno malo trokutâ, tada uklanjanjem relativno malog broja bridova možemo eliminirati sve trokute.* Napomenimo kako je tvrdnja trivijalna za $\delta \geq 1/2$, jer je $|E| \leq \binom{n}{2} < n^2/2$, a uklanjanjem svih bridova iz E će svakako nestati i svi trokuti iz G.

Za dokaz leme 1.1 trebat će dosta priprema u narednim odjeljcima. Zasad samo prokomentirajmo u kakvoj je ona vezi s teoremima aditivne kombinatorike. Iskazali su je I. Z. Ruzsa i E. Szemerédi [9], kao i uočili da ona implicira Rothov teorem, što ćemo uskoro i mi pokazati. Nadalje, vidjet ćemo da ona povlači i teorem o uglovima, što je prvi primijetio J. Solymosi [13].

Primijetimo da, ako u grafu postoji m trokutâ s međusobno disjunktnim bridovima, tada za njihovu eliminaciju svakako treba ukloniti barem m bridova. Zato obratom po kontrapoziciji u lemi 1.1 dobivamo sljedeću, nešto operativniju posljedicu.

Korolar 1.1. Za svaki $\delta > 0$ postoji konstanta $\beta(\delta) > 0$ sa sljedećim svojstvom: ako je G graf s n vrhova koji sadrži barem δn^2 trokutâ bez zajedničkih bridova, tada G mora sadržavati ukupno barem $\beta(\delta)n^3$ trokutâ.

Čitatelj može razmisliti čini li mu se tvrdnja korolara 1.1 očekivana ili iznenađujuća. Mogli bismo pomisliti kako se na temelju pretpostavke na graf G može jedino zaključiti da je broj trokutâ u njemu reda veličine n^2, ali je ustvari taj broj maksimalnog mogućeg reda veličine, tj. n^3.

Zanimljivo je kako je korolar 1.1 jači rezultat od teorema 1.1–1.3, premda on iz formulacije eliminira svaki spomen operacije zbrajanja.

Dokaz teorema 1.2 korištenjem korolara 1.1. Postupit ćemo slično kao u [7] ili [18]. Fiksirajmo $0 < \delta \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ i skup $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ za koji vrijedi $|A| \geq \delta n$. Promotrimo graf G čiji skup vrhova je $V := \{1, 2, \ldots, 3n\} \times \{1, 2, 3\}$, a bridovi su mu određeni na sljedeći način:

- vrhovi $(i, 1)$ i $(j, 2)$ su spojeni bridom ako i samo ako je $j - i \in A$,
- vrhovi $(i, 1)$ i $(k, 3)$ su spojeni bridom ako i samo ako je $(k - i)/2 \in A$,
- vrhovi $(j, 2)$ i $(k, 3)$ su spojeni bridom ako i samo ako je $k - j \in A$,

pri čemu su $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, 3n\}$ proizvoljni.

Za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i svaki $a \in A$ vrhovi

$$(i, 1), \ (i + a, 2), \ (i + 2a, 3)$$

čine trokut u grafu G. Očigledno su bridovi svih tih trokutâ međusobno disjunktni, jer bilo koja dva od tih parova jednoznačno određuju brojeve a i i. Dakle, G ima barem $n|A| \geq \delta n^2 = (\delta/81)|V|^2$ trokutâ bez zajedničkih bridova pa po korolaru 1.1 on sadrži barem $\beta(\delta/81)|V|^3$ trokutâ.

Uočimo da trojka vrhova $(i, 1)$, $(j, 2)$, $(k, 3)$ čini trokut u G ako i samo ako je $j = i + a$, $k = i + 2b$ za neku aritmetičku progresiju (a, b, c) u skupu A, jer iz tih dviju jednakosti odmah slijedi i $k - j = 2b - a = c$. Svaka takva aritmetička progresija može biti pridružena za najviše $3n$ trokutâ, jer ima manje od $3n$ mogućnosti za indeks i. Iz prethodno dobivenog zaključujemo da skup A sadrži barem

$$\frac{\beta(\delta/81)(9n)^3}{3n} = \alpha(\delta)n^2$$

aritmetičkih progresija duljine 3, pri čemu smo stavili $\alpha(\delta) = 3^5\beta(\delta/81)$.$\square$

Dokaz teorema o uglovima je još elegantniji ako maštovito reinterpretiramo tvrdnju.

Dokaz teorema 1.3 korištenjem korolara 1.1. Fiksirajmo $0 < \delta \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ i skup $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}^2$ s barem δn^2 elemenata. Ovaj put za skup vrhova grafa G uzimamo sve pravce s nagibom -1, 0 ili ∞ koji imaju neprazan presjek sa $\{1, 2, \ldots, n\}^2$. Preciznije, V je skup svih pravaca čija jednadžba u pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu ima jedan od sljedećih oblika:

- $y = -x + c$ za neki $c \in \{2, 3, \ldots, 2n\}$,
- $y = c$ za neki $c \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
- $x = c$ za neki $c \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Odavde vidimo da je $|V| = 4n - 1$. Smatrat ćemo da su dva vrha spojena bridom ako i samo ako se odgovarajući pravci sijeku u nekoj točki skupa A. Primijetimo da trojka pravaca čini trokut ako i samo ako se u parovima sijeku i točke njihovih presjeka čine ugao u skupu A.

Kroz svaku točku $(a, b) \in A$ prolaze tri gore navedena pravca i oni čine trokut (kojem odgovara trivijalni ugao). Svi ti trokuti imaju međusobno različite bridove, jer već bilo koja dva od tri pravca jednoznačno određuju točku presjeka. Po pretpostavci takvih trokutâ ima barem $\delta n^2 > (\delta/16)|V|^2$. Iz korolara 1.1 zaključujemo da G ukupno ima barem $\beta(\delta/16)|V|^3$ trokutâ pa, posljedično, u skupu A postoji barem $\beta(\delta/16)(4n-1)^3$ uglova. Kako trivijalnih uglova ima $|A| \leq n^2$, preostaje za $n_0(\delta)$ uzeti najmanji prirodni broj n takav da vrijedi $\beta(\delta/16)(4n-1)^3 > n^2$. □

Primijetimo da smo u oba dokaza lemu o uklanjanju trokutâ primjenjivali na tzv. *tripartitne grafove*, tj. takve kod kojih se skup vrhova može particionirati $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ tako da nikoja dva vrha iz istog člana particije nisu spojena bridom. Nadalje, iz gornjih dokaza dobivamo primjere grafova koji doista sadrže δn^2 trokutâ s disjunktnim bridovima.

2 Pripremni rezultati iz teorije vjerojatnosti

Sada ćemo dati kratki pregled osnovnih pojmova i rezultata iz teorije vjerojatnosti koji će biti korišteni u iduća dva odjeljka. Za čitatelja koji je već upoznat s *općom teorijom vjerojatnosti* (vidjeti npr. knjigu [10]) iznijet ćemo definicije na sasvim općenitom i apstraktnom vjerojatnosnom prostoru. S druge strane, za dokaz leme 1.1 bi bilo dovoljno raditi samo na konačnom prostoru elementarnih događaja i, posljedično, s diskretnim slučajnim varijablama. Zato ćemo za manje iskusnog čitatelja, radi lakše čitljivosti teksta, dati i posebne slučajeve definicija u tom kontekstu i tada je samo poželjna familijarnost s vrlo osnovnim konceptima *elementarne teorije vjerojatnosti* (vidjeti npr. udžbenike [11] i [12]).

2.1 Vjerojatnosni prostor i slučajne varijable

Osnovni koncept u teoriji vjerojatnosti je uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, koja čini tzv. *vjerojatnosni prostor*. Pritom je Ω neprazan skup, čije elemente zovemo *elementarni događaji*, a $\mathcal{F}$ je σ-algebra podskupova od Ω, čije članove zovemo *događaji*. To znači da je $\mathcal{F}$ familija koja sadrži $\emptyset$ i Ω i zatvorena je na prebrojive skupovne operacije; dovoljno je zahtijevati zatvorenost na komplementiranje i na prebrojive unije. Skup $\emptyset$ zovemo *nemoguć događaj*, a Ω je *siguran događaj*. Konačno, $\mathbb{P}\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ zovemo *vjerojatnost* ili *vjerojatnosna mjera* i to je skupovna funkcija koja zadovoljava $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ i ima svojstvo σ-aditivnosti, tj. $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ za bilo koje disjunktne događaje $A_1, A_2, \ldots$. U posebnom slučaju kada je Ω konačan skup možemo uzeti

$$\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) := |A|/|\Omega| \text{ za svaki } A \subseteq \Omega, \tag{1}$$

tj. svi podskupovi od Ω su događaji, a vjerojatnost događaja A proporcionalna je broju njegovih elemenata.

Za σ-algebru $\mathcal{G}$ takvu da je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ kažemo da je *σ-podalgebra*, a ukoliko je i konačna (tj. $\mathcal{G}$ sadrži samo konačno mnogo događaja) zovemo ju *podalgebra* od $\mathcal{F}$. Naime, tada je dovoljno zahtijevati samo zatvorenost na konačne skupovne operacije. Svaka konačna podalgebra od $\mathcal{F}$ se može atomizirati, o čemu govori idući zadatak.

Zadatak 2.1. Ako je $\mathcal{G}$ konačna podalgebra od $\mathcal{F}$, dokažite da postoji jedinstvena particija $\mathcal{A}$ skupa Ω na konačno mnogo njegovih nepraznih podskupova takva da se $\mathcal{G}$ sastoji od svih unija (uključujući i praznu uniju $\emptyset$) članova od $\mathcal{A}$. Elemente od $\mathcal{A}$ zovemo *atomi* podalgebre $\mathcal{G}$. Dakle, ako $\mathcal{G}$ ima točno n atoma, tada $\mathcal{G}$ sadrži točno 2^n događaja.

Za bilo koje događaje $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{F}$ možemo promatrati najmanju podalgebru od $\mathcal{F}$ koja ih sadrži; zovemo ju podalgebra *generirana* tim događajima i označavamo $\sigma(\{A_1, A_2, \ldots, A_m\})$. Lako je vidjeti da njoj odgovara particija od Ω na skupove $A_1^* \cap A_2^* \cap \cdots \cap A_m^*$, pri čemu A_i^* zamjenjuje A_i ili A_i^c za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$ te izbacujemo prazne presjeke. Posebno vidimo da $\sigma(\{A_1, A_2, \ldots, A_m\})$ može imati najviše 2^m atoma.

Svaka konačna podalgebra $\mathcal{G}$ od $\mathcal{F}$ je očigledno generirana samo s konačno mnogo događaja. Kažemo da $\mathcal{G}$ ima *složenost* $m \in \mathbb{N}$ ukoliko je ona generirana s nekih m događaja, ali nije generirana ni s kojih $m-1$ događaja. Dogovorno stavljamo i da trivijalna podalgebra $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ ima složenost 0. Prema komentaru od malo prije, podalgebra složenosti m ima najviše 2^m atoma, što dalje znači da sadrži najviše 2^{2^m} događaja.

Slučajne varijable su realne funkcije na vjerojatnosnom prostoru koje imaju tzv. svojstvo izmjerivosti. Umjesto da izložimo definiciju iz [10], mi ćemo samo dati jednu elegantnu karakterizaciju iz iste knjige: funkcija $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ je slučajna varijabla ako i samo ako je za svaki $c \in \mathbb{R}$ skup oblika

$$\{X \leq c\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq c\}$$

događaj, tj. element σ-algebre $\mathcal{F}$. Analogne karakterizacije vrijede i kada $\{X \leq c\}$ zamijenimo skupovima oblika $\{X < c\}$, $\{X \geq c\}$ ili $\{X > c\}$. Ukoliko pak krenemo od događaja $A \in \mathcal{F}$, prirodno mu je pridružiti slučajnu varijablu $\mathbb{1}_A$, koju nazivamo *indikator od A* ili *karakteristična funkcija skupa A*, a definiramo ju

$$\mathbb{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{ako je } \omega \in A, \\ 0 & \text{ako je } \omega \in \Omega \setminus A. \end{cases}$$

Sa slučajnim varijablama često notacijski postupamo kao s brojevima pa nam tako npr. $X \leq Y$ znači da je $X(\omega) \leq Y(\omega)$ za svaki $\omega \in \Omega$, ali nam inače $\{X \leq Y\}$ označava događaj $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq Y(\omega)\}$, a $\mathbb{P}(X \leq Y)$ njegovu vjerojatnost. Nadalje, presjek događaja vezanih uz slučajne varijable često samo odvajamo zarezom pa nam npr. $\{X > 1, Y > 2, X + Y < 5\}$ označava presjek događaja $\{X > 1\}$, $\{Y > 2\}$ i $\{X + Y < 5\}$.

Jedan od osnovnih koncepata vezanih uz slučajnu varijablu X je njeno *očekivanje* $\mathbb{E}X$, koje se može interpretirati kao njena svojevrsna prosječna vrijednost. Ovdje nećemo prezentirati konstrukciju od $\mathbb{E}X$ (jer ona zalazi duboko u teoriju mjere), već ćemo samo reći da je moguće krenuti od razumnog uvjeta $\mathbb{E}\mathbb{1}_A = \mathbb{P}(A)$ za svaki $A \in \mathcal{F}$ i proširiti operator $\mathbb{E}$ na kolekciju svih ograničenih slučajnih varijabli tako da bude linearan,

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y,$$

i monoton,

$$X \leq Y \implies \mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y,$$

za svake dvije slučajne varijable X, Y i konstante $a, b \in \mathbb{R}$. U posebnom slučaju kad je prostor elementarnih događaja Ω konačan, a vjerojatnost $\mathbb{P}$ je dana formulom (1), očekivanje slučajne varijable $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ može se računati konačnim zbrojem

$$\mathbb{E}X = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \tag{2}$$

i tada vidimo da je $\mathbb{E}X$ u stvari uobičajeni prosjek od X.

Zadatak 2.2. (a) Dokažite tzv. *Markov-Čebiševljevu nejednakost*: Ako je X slučajna varijabla koja poprima samo nenegativne vrijednosti, tada za svaki $c > 0$ vrijedi $\mathbb{P}(X \geq c) \leq (\mathbb{E}X)/c$.

(b) Izvedite apstraktnu formulaciju *Dirichletovog principa*: Ako za slučajnu varijablu X i konstantu $c \in \mathbb{R}$ vrijedi $\mathbb{E}X \geq c$, tada postoji $\omega \in \Omega$ za kojeg je $X(\omega) \geq c$.

Ukoliko imamo dva vjerojatnosna prostora, $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$, tada je na Kartezijevom produktu $\Omega_1 \times \Omega_2$ prirodno promatrati produktnu σ-algebru $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, tj. najmanju σ-algebru podskupova od $\Omega_1 \times \Omega_2$ koja sadrži sve skupove oblika $A \times B$ za $A \in \mathcal{F}_1$ i $B \in \mathcal{F}_2$. Može se pokazati da postoji jedinstvena vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ na $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ takva da vrijedi $(\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2)(A \times B) = \mathbb{P}_1(A)\mathbb{P}_2(B)$. Pomoću te vjerojatnosne mjere definirano je i očekivanje slučajne varijable $X\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$, koje opet označavamo samo $\mathbb{E}X$, u nadi da je vjerojatnosni prostor jasan iz konteksta. Kada želimo naglasiti produktnu strukturu, pisat ćemo $\mathbb{E}_{\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2} X(\omega_1, \omega_2)$, tj. u indeksu od $\mathbb{E}$ ćemo označavati po kojim prostorima Ω_i se uzima očekivanje i obzirom na koje ω_i iz izraza pod očekivanjem.

Ako su pak $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{F}_1$ i $\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}_2$ konačne podalgebre kojima redom odgovaraju particije na atome $\{A_1, \ldots, A_m\}$ i $\{B_1, \ldots, B_n\}$, tada Kartezijevi produkti $A_i \times B_j$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ čine atome od $\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$.

2.2 Uvjetno očekivanje i dvije važne norme

Pretpostavimo sada da je zadan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i ograničena slučajna varijabla X na njemu. Uzmimo proizvoljnu konačnu podalgebru $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ i neka su $A_1, \ldots, A_n$ njezini atomi pozitivne vjerojatnosti. *Uvjetno očekivanje od X obzirom na podalgebru $\mathcal{G}$* je nova slučajna varijabla $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ na istom vjerojatnosnom prostoru definirana s

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{A_i})}{\mathbb{P}(A_i)} \mathbb{1}_{A_i}.$$

Dakle, za $\omega \in A_i$ je $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})(\omega)$ upravo prosječna vrijednost od X na događaju A_i. S druge strane, ova definicija stavlja $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})(\omega) = 0$ za ω iz atoma koji ima vjerojatnost 0, ali ionako nije jako važno čemu je jednaka slučajna varijabla na događaju vjerojatnosti 0. Ako baš uzmemo trivijalnu podalgebru $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, koja ima samo jedan atom Ω, odmah vidimo da je $\mathbb{E}(X|\{\emptyset, \Omega\})$ konstantno jednaka $\mathbb{E}X$ na cijelom prostoru. Radi toga uvjetno očekivanje poopćuje obično očekivanje.

Zadatak 2.3. Dokažite nekoliko svojstava uvjetnog očekivanja.

(a) Ako za neke $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le 0 \le b$ vrijedi $a \le X \le b$, tada je također $a \le \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \le b$.

(b) Za svaki $A \in \mathcal{G}$ vrijedi $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbb{1}_A\big) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_A)$ te posebno imamo $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big) = \mathbb{E}X$.

(c) Ako su $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ konačne podalgebre od $\mathcal{F}$ takve da je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$, tada vrijedi
$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big|\mathcal{H}\big) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{H})\big|\mathcal{G}\big).$$

Definirat ćemo L^2 *normu* ograničene slučajne varijable X kao broj

$$\|X\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} := (\mathbb{E}X^2)^{1/2}.$$

Ova veličina zadovoljava definicijska svojstva norme, od kojih je netrivijalna jedino *nejednakost trokuta*:

$$\|X + Y\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le \|X\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|Y\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$$

za bilo koje ograničene slučajne varijable X i Y. *Cauchy-Schwarzova nejednakost* se u ovom kontekstu može zapisati

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \|X\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \|Y\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

Reći ćemo da su X i Y *ortogonalne* ako je $\mathbb{E}(XY) = 0$ i u tom slučaju iz linearnosti očekivanja odmah slijedi tzv. *Pitagorin poučak*,

$$\|X+Y\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}^2 = \|X\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}^2 + \|Y\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}^2.$$

Zadatak 2.4. (a) Ako su $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$ konačne podalgebre od $\mathcal{F}$, dokažite da su slučajne varijable $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ i $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ ortogonalne.

(b) Ako su $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ konačne podalgebre od $\mathcal{F}$, dokažite da su slučajne varijable $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ i $\mathbb{E}(X|\mathcal{J}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{I})$ ortogonalne.

Za ograničenu slučajnu varijablu X definiranu na produktu $\Omega_1 \times \Omega_2$ vjerojatnosnih prostora moguće je definirati i razne druge veličine. Jedna takva, koja će nam trebati u kasnijim odjeljcima, je tzv. *pravokutna norma*,

$$\begin{aligned} &\|X\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)} \\ &:= \Big(\mathbb{E}_{\omega_1,\omega_1'\in\Omega_1,\omega_2,\omega_2'\in\Omega_2}\big(X(\omega_1,\omega_2)X(\omega_1,\omega_2')X(\omega_1',\omega_2)X(\omega_1',\omega_2')\big)\Big)^{1/4}. \end{aligned}$$

Takav naziv je dobila jer točke u kojima izračunavamo vrijednosti od X čine vrhove svojevrsnog pravokutnika u $\Omega_1 \times \Omega_2$. Iz narednog zadatka slijedi da ta veličina zadovoljava nejednakost trokuta, što nam daje za pravo da je zovemo normom.

Zadatak 2.5. Dokažite nekoliko svojstava pravokutne norme.

(a) Pokažite da je $\|X\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)}$ dobro definirano, tj. da je izraz pod četvrtim korijenom uvijek nenegativan.

(b) Za ograničene slučajne varijable W, X, Y, Z pokažite

$$\begin{aligned} &\big|\mathbb{E}_{\omega_1,\omega_1'\in\Omega_1,\omega_2,\omega_2'\in\Omega_2}\big(W(\omega_1,\omega_2)X(\omega_1,\omega_2')Y(\omega_1',\omega_2)Z(\omega_1',\omega_2')\big)\big| \\ &\leq \|W\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)}\|X\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)}\|Y\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)}\|Z\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)}. \end{aligned}$$

(c) Posebno zaključite da za ograničene slučajne varijable X i Y vrijedi

$$\|X+Y\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)} \leq \|X\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)} + \|Y\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)}.$$

3 Vjerojatnosna varijanta leme o regularnosti

Konačno smo u mogućnosti formulirati glavni rezultat ovog članka, koji će govoriti o dekompoziciji proizvoljne slučajne varijable na sljedeća tri dijela.

- *Strukturirani dio* će biti slučajna varijabla koja poprima samo kontrolirano veliki broj vrijednosti. Preciznije, ona će biti uvjetno očekivanje polazne slučajne varijable obzirom na podalgebru kontrolirane složenosti.

- *Pseudoslučajni dio* će biti slučajna varijabla koja u nekom smislu slabo korelira s produktnom strukturom. Pseudoslučajnost ćemo mjeriti ranije spomenutom pravokutnom normom, koja bi za takvu slučajnu varijablu trebala biti razmjerno mala. Naziv dolazi od heurističkih razmatranja (u koja ovdje nećemo ulaziti) kod kojih čitavu slučajnu varijablu shvaćamo kao elementarni događaj u nekom velikom vjerojatnosnom prostoru, npr. bacajući novčić za svaku njezinu pojedinu vrijednost. Tako nasumično odabrana slučajna varijabla bi s velikom vjerojatnošću trebala biti pseudoslučajna.

- *Greška* će biti slučajna varijabla koja je mala u L^2 normi. Ona je u praksi zanemariva i ne igra značajnu ulogu.

Slikovite nazive tih dijelova treba shvatiti samo intuitivno, a uskoro će uslijediti precizne definicije. Rezultat ovog tipa, ali za grafove, prvi je formulirao E. Szemerédi [15], a danas se on naziva *Szemerédijeva lema o regularnosti*. Uslijedila su brojna poopćenja, na kojima su radili mnogi poznati matematičari, među ostalima i T. Tao. Mi ćemo prezentirati vjerojatnosnu varijantu leme o regularnosti i to upravo prema njegovom preglednom članku [18].

U cijelom ovom i idućem odjeljku podrazumijevat će se da su $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$, $i = 1, 2, 3$, vjerojatnosni prostori. Možemo ih smatrati fiksiranima, ali napomenimo da nikoje konstante iz rezultata koji slijede neće ovisiti o njima. Elemente od Ω_i ćemo i dalje tipično pisati ω_i, ω_i', dok ćemo podalgebre od $\mathcal{F}_i$ označavati $\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_i', \mathcal{G}_i^0, \mathcal{G}_i^1$, itd.

3.1 Dvije formulacije glavnog rezultata

Teorem 3.1. *(Vjerojatnosna varijanta leme o regularnosti)* Uzmimo proizvoljnu funkciju $F\colon \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}$ i definirajmo niz nenegativnih cijelih brojeva $(m_i)_{i=0}^{\infty}$ rekurzivnom formulom

$$m_0 = 0, \quad m_{i+1} = m_i + 16F(m_i)^8 \text{ za } i \geq 0.$$

Za svaku slučajnu varijablu $X\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0,1]$ i proizvoljni $\varepsilon > 0$ postoje cijeli broj $0 \le k \le \lfloor \varepsilon^{-2} \rfloor$ i konačne podalgebre $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_2$ redom od $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ složenosti najviše m_k tako da X ima dekompoziciju

$$X = X_{\mathrm{st}} + X_{\mathrm{ps}} + X_{\mathrm{gr}},$$

pri čemu vrijedi:

- $X_{\mathrm{st}} = E(X|\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2)$ (X_{st} je strukturirana),
- $\|X_{\mathrm{ps}}\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)} < 1/F(m_k)$ (X_{ps} je pseudoslučajna),
- $\|X_{\mathrm{gr}}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)} < \varepsilon$ (X_{gr} je greška),
- slučajne varijable X_{st} i $X_{\mathrm{st}} + X_{\mathrm{gr}}$ poprimaju vrijednosti u intervalu $[0,1]$.

U iskazu teorema smo koristili oznaku $\lfloor x \rfloor$ za najveći cijeli broj manji ili jednak x (tzv. *najveće cijelo* od x), a kasnije ćemo još sa $\lceil x \rceil$ označavati najmanji cijeli broj veći ili jednak x (tzv. *najmanje cijelo* od x). Primijetimo usput da iz

$$0 \le X_{\mathrm{st}},\ X_{\mathrm{st}} + X_{\mathrm{gr}},\ X_{\mathrm{st}} + X_{\mathrm{gr}} + X_{\mathrm{ps}} \le 1 \tag{3}$$

slijedi

$$-1 \le X_{\mathrm{ps}}, X_{\mathrm{gr}} \le 1. \tag{4}$$

U gornjoj formulaciji isprva začuđuje pojavljivanje proizvoljne funkcije F, no to je fleksibilnost koju želimo imati kao kompenzaciju za slabu kontrolu nad brojem m_k.

Zadatak 3.1. U rekurziji iz teorema 3.1 uzmite nekoliko primjera funkcije F, poput $F(n) = (n+1)^2$ ili $F(n) = 2^n$. Uvjerite se pomoću računala da niz $(m_i)_{i=0}^{\infty}$ tipično raste astronomski brzo.

Nadalje, može nas zbuniti potreba za uvođenjem greške X_{gr}. Dekompozicije kod kojih nema člana interpretiranog kao greška često zovemo *naivnim*. Jednu takvu *naivnu varijantu leme o regularnosti* ostavljamo čitatelju kao zadatak za vježbu nakon čitanja ostatka ovog članka.

Zadatak 3.2. Neka je $X\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0,1]$ proizvoljna slučajna varijabla i neka je dan broj $\eta > 0$. Pokažite da postoje konačne podalgebre $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_2$ od $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ složenosti najviše $16/\eta^8$ takve da X ima dekompoziciju $X = X_{\mathrm{st}} + X_{\mathrm{ps}}$, pri čemu vrijedi:

- $X_{\mathrm{st}} = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2)$ (X_{st} je strukturirana),

- $\|X_{\mathrm{ps}}\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)} < \eta$ (X_{ps} je pseudoslučajna).

Usporedimo zadatak 3.2 s teoremom 3.1. U navedenom zadatku produkt ograde za složenost i osme potencije ograde za pseudoslučajnost iznosi 16. S druge strane, pogodnim odabirom funkcije F u teoremu 3.1 možemo garantirati da je bilo koji produkt tog tipa po volji malen. Ipak, tada moramo dozvoliti postojanje trećeg pribrojinika X_{gr}.

Kako bismo vjerojatnosnu varijantu leme o regularnosti mogli iskoristiti za dokaz leme o uklanjanju trokutâ, potrebna nam je malo općenitija formulacija koja istodobno dekomponira tri slučajne varijable.

Teorem 3.2. *(O istovremenoj regularnosti)* Uzmimo proizvoljnu funkciju $F\colon \mathbb{N}\cup\{0\}\to\mathbb{N}$ i definirajmo niz $(m_i)_{i=0}^{\infty}$ rekurzivnom formulom

$$m_0 = 0, \quad m_{i+1} = m_i + 32F(m_i)^8 \text{ za } i \geq 0. \tag{5}$$

Neka su $X\colon \Omega_1\times\Omega_2\to[0,1]$, $Y\colon \Omega_2\times\Omega_3\to[0,1]$ i $Z\colon \Omega_3\times\Omega_1\to[0,1]$ slučajne varijable te neka je dan broj $\varepsilon > 0$. Tada postoje cijeli broj $0 \leq k \leq \lfloor 3\varepsilon^{-2}\rfloor$ i konačne podalgebre $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ od $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ složenosti najviše m_k tako da se sve tri slučajne varijable X, Y, Z mogu istovremeno rastaviti kao

$$X = X_{\mathrm{st}} + X_{\mathrm{ps}} + X_{\mathrm{gr}}, \quad Y = Y_{\mathrm{st}} + Y_{\mathrm{ps}} + Y_{\mathrm{gr}}, \quad Z = Z_{\mathrm{st}} + Z_{\mathrm{ps}} + Z_{\mathrm{gr}}, \tag{6}$$

pri čemu vrijedi:

- $X_{\mathrm{st}} = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1\otimes\mathcal{G}_2),\ Y_{\mathrm{st}} = \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_2\otimes\mathcal{G}_3),\ Z_{\mathrm{st}} = \mathbb{E}(Z|\mathcal{G}_3\otimes\mathcal{G}_1)$,
- $\|X_{\mathrm{ps}}\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)}, \|Y_{\mathrm{ps}}\|_{\square^2(\Omega_2\times\Omega_3)}, \|Z_{\mathrm{ps}}\|_{\square^2(\Omega_3\times\Omega_1)} < 1/F(m_k)$,
- $\|X_{\mathrm{gr}}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)}, \|Y_{\mathrm{gr}}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_2\times\Omega_3)}, \|Z_{\mathrm{gr}}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_3\times\Omega_1)} < \varepsilon$,
- slučajne varijable X_{st}, $X_{\mathrm{st}}+X_{\mathrm{gr}}$, Y_{st}, $Y_{\mathrm{st}}+Y_{\mathrm{gr}}$, Z_{st}, $Z_{\mathrm{st}}+Z_{\mathrm{gr}}$ poprimaju vrijednosti u intervalu $[0,1]$.

3.2 Tri pomoćne tvrdnje

Pripremni dio dokaza teorema 3.1 i 3.2 provest ćemo kroz tri leme. Najprije ćemo se uvjeriti da pravokutna norma doista daje dobru mjeru pseudoslučajnosti. Preciznije, pokazat ćemo da, ako imamo slučajnu varijablu sa zamjetno velikom pravokutnom normom, onda u toj slučajnoj varijabli možemo pronaći određenu strukturiranost.

Lema 3.1. *Ako za slučajnu varijablu* $X\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to [-1,1]$ *i broj* $\eta > 0$ *vrijedi*

$$\|X\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)} \geq \eta,$$

tada postoje događaji $A \in \mathcal{F}_1$ *i* $B \in \mathcal{F}_2$ *takvi da je*

$$|\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{A\times B})| \geq \frac{\eta^4}{4}.$$

Dokaz. Pretpostavka je da vrijedi

$$\mathbb{E}_{\omega_1,\omega_1'\in\Omega_1,\omega_2,\omega_2'\in\Omega_2}\big(X(\omega_1,\omega_2)X(\omega_1,\omega_2')X(\omega_1',\omega_2)X(\omega_1',\omega_2')\big) \geq \eta^4.$$

Primjenom Dirichletovog principa (vidjeti (b) dio zadatka 2.2) možemo naći $\omega_1' \in \Omega_1$ i $\omega_2' \in \Omega_2$ za koje je

$$X(\omega_1',\omega_2')\,\mathbb{E}_{\omega_1\in\Omega_1,\omega_2\in\Omega_2}\big(X(\omega_1,\omega_2)X(\omega_1,\omega_2')X(\omega_1',\omega_2)\big) \geq \eta^4$$

pa ocjenjivanjem $|X(\omega_1',\omega_2')| \leq 1$ dobivamo

$$\big|\mathbb{E}_{\omega_1\in\Omega_1,\omega_2\in\Omega_2}\big(X(\omega_1,\omega_2)X(\omega_1,\omega_2')X(\omega_1',\omega_2)\big)\big| \geq \eta^4.$$

Raspišimo

$$\begin{aligned} X(\omega_1,\omega_2') &= \begin{cases} \int_0^{X(\omega_1,\omega_2')} 1ds & \text{ako je } X(\omega_1,\omega_2') \in [0,1], \\ \int_{X(\omega_1,\omega_2')}^0 (-1)ds & \text{ako je } X(\omega_1,\omega_2') \in [-1,0\rangle \end{cases} \\ &= \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(s)\,\mathbb{1}_{A_s}(\omega_1)ds, \end{aligned}$$

pri čemu sgn označava funkciju *signum* (tj. predznak realnog broja) i još smo definirali

$$A_s := \begin{cases} \{\omega_1 \in \Omega_1\colon X(\omega_1,\omega_2') \geq s\} & \text{ako je } s \in [0,1], \\ \{\omega_1 \in \Omega_1\colon X(\omega_1,\omega_2') \leq s\} & \text{ako je } s \in [-1,0\rangle. \end{cases}$$

Događaje B_t definiramo analogno, pomoću vrijednosti od $X(\omega_1',\omega_2)$, te postupamo na isti način. Zamjenom očekivanja i integracije slijedi

$$\Big|\int_{-1}^1\int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(s)\operatorname{sgn}(t)\mathbb{E}_{\omega_1\in\Omega_1,\omega_2\in\Omega_2}\big(X(\omega_1,\omega_2)\mathbb{1}_{A_s}(\omega_1)\mathbb{1}_{B_t}(\omega_2)\big)dsdt\Big| \geq \eta^4.$$

Primijenimo još jednom Dirichletov princip, ovog puta na par brojeva $s,t \in [-1,1]$, kako bismo našli događaje $A = A_s \in \mathcal{F}_1$ i $B = B_t \in \mathcal{F}_2$ takve da je

$$4\big|\mathbb{E}_{\omega_1\in\Omega_1,\omega_2\in\Omega_2}\big(X(\omega_1,\omega_2)\mathbb{1}_A(\omega_1)\mathbb{1}_B(\omega_2)\big)\big| \geq \eta^4.$$

Tvrdnja sada slijedi dijeljenjem s 4. $\square$

Ideja vjerojatnosne varijante leme o regularnosti je aproksimirati slučajnu varijablu X slučajnom varijablom X_{st} kontrolirane složenosti toliko dobro da ostatak bude mali u pravokutnoj normi. Sljedeća lema nam je važna jer pokazuje da aproksimaciju koja nije dovoljno dobra možemo poboljšati.

Lema 3.2. *Neka je $X\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0,1]$ slučajna varijabla. Pretpostavimo da postoje konstanta $\eta > 0$, nenegativan cijeli broj m i konačne podalgebre $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{F}_1$ i $\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}_2$ složenosti najviše m tako da je*

$$\|X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2)\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)} \geq \eta.$$

Tada možemo naći konačne podalgebre $\mathcal{G}_1' \subseteq \mathcal{F}_1$ i $\mathcal{G}_2' \subseteq \mathcal{F}_2$ složenosti najviše $m+1$ koje redom proširuju $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_2$ i za koje vrijedi

$$\|\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1' \otimes \mathcal{G}_2')\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)} \geq \|\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)} + \frac{\eta^8}{16}.$$

Dokaz. Primijenimo prethodnu lemu na slučajnu varijablu $X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2)$ i nađimo događaje $A \in \mathcal{F}_1$ i $B \in \mathcal{F}_2$ za koje je

$$\Big|\mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2)\big)\mathbb{1}_{A\times B}\Big)\Big| \geq \frac{\eta^4}{4}.$$

Neka je $\mathcal{G}_1'$ jednaka algebri generiranoj skupovima iz $\mathcal{G}_1$ i skupom A, tj. $\mathcal{G}_1' := \sigma(\mathcal{G}_1 \cup \{A\})$, i neka je podalgebra $\mathcal{G}_2'$ jednaka $\sigma(\mathcal{G}_2 \cup \{B\})$. Jasno je da su $\mathcal{G}_1'$ i $\mathcal{G}_2'$ složenosti najviše $m+1$. Računamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2)\big)\mathbb{1}_{A\times B}\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2)\big|\mathcal{G}_1' \otimes \mathcal{G}_2'\big)\mathbb{1}_{A\times B}\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1' \otimes \mathcal{G}_2') - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2)\big)\mathbb{1}_{A\times B}\Big).
\end{aligned}$$

Pritom smo iskoristili dijelove (b) i (c) zadatka 2.3 i činjenicu da je $A \times B \in \mathcal{G}_1' \otimes \mathcal{G}_2'$. Primjenom Cauchy-Schwarzove nejednakosti dobivamo

$$\|\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1' \otimes \mathcal{G}_2') - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)}\|\mathbb{1}_{A\times B}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)} \geq \frac{\eta^4}{4}$$

pa ocjenjivanjem $\|\mathbb{1}_{A\times B}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)} \leq 1$ nestaje drugi faktor s lijeve strane, tj. imamo

$$\|\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1' \otimes \mathcal{G}_2') - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)} \geq \frac{\eta^4}{4}. \tag{7}$$

Kako su slučajne varijable $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2)$ i $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1' \otimes \mathcal{G}_2') - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2)$ ortogonalne, vidi zadatak 2.4(a), iz Pitagorinog poučka i (7) potom slijedi

$$\begin{aligned}
&\|\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1' \otimes \mathcal{G}_2')\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)} \\
&= \|\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)} + \|\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1' \otimes \mathcal{G}_2') - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)} \\
&\geq \|\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)} + \frac{\eta^8}{16},
\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. □

Iteriranjem prethodne leme ćemo slučajnu varijablu X proizvoljno dobro aproksimirati slučajnim varijablama koje poprimaju samo konačno mnogo vrijednosti. Naravno, što bolju aproksimaciju želimo, to veću složenost aproksimirajuće slučajne varijable moramo dozvoliti, tj. ona mora biti definirana kao uvjetno očekivanje obzirom na podalgebru velike složenosti.

Lema 3.3. *Neka je $X\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0,1]$ proizvoljna slučajna varijabla, neka je m nenegativan cijeli broj, neka su $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{F}_1$ i $\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}_2$ konačne podalgebre složenosti najviše m i neka je $\eta > 0$ proizvoljna konstanta. Tada možemo proširiti $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_2$ redom do podalgebri $\mathcal{G}_1'$ i $\mathcal{G}_2'$ složenosti najviše $m + 16/\eta^8$ tako da je*

$$\|X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1' \otimes \mathcal{G}_2')\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)} < \eta. \tag{8}$$

Dokaz. Konstruirat ćemo dva niza konačnih podalgebri,

$$\mathcal{G}_1^0 \subseteq \mathcal{G}_1^1 \subseteq \mathcal{G}_1^2 \subseteq \cdots \ \text{ i } \ \mathcal{G}_2^0 \subseteq \mathcal{G}_2^1 \subseteq \mathcal{G}_2^2 \subseteq \cdots,$$

takvih da $\mathcal{G}_1^i$ i $\mathcal{G}_2^i$ imaju složenost najviše $m+i$ za svaki indeks i.

Stavimo $\mathcal{G}_1^0 := \mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_2^0 := \mathcal{G}_2$. Ostatak niza konstruiramo induktivno koristeći prethodno dokazanu lemu 3.2. Pretpostavimo da smo za neki indeks i već definirali podalgebre $\mathcal{G}_1^i$ i $\mathcal{G}_2^i$ složenosti najviše $m+i$.

(1°) Ako je $\|X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1^i \otimes \mathcal{G}_2^i)\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)} < \eta$, onda stajemo s konstrukcijom niza te izabiranjem $\mathcal{G}_1' := \mathcal{G}_1^i$ i $\mathcal{G}_2' := \mathcal{G}_2^i$ dobivamo (8), što dokazuje teorem ukoliko je i manji ili jednak $16/\eta^8$.

(2°) U suprotnom je $\|X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1^i \otimes \mathcal{G}_2^i)\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)} \geq \eta$ pa primjenom leme 3.2 možemo naći podalgebre $\mathcal{G}_1^{i+1}$ i $\mathcal{G}_2^{i+1}$ složenosti najviše $m+i+1$ takve da vrijedi

$$\|\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1^{i+1} \otimes \mathcal{G}_2^{i+1})\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)} \geq \|\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1^i \otimes \mathcal{G}_2^i)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)} + \frac{\eta^8}{16}.$$

Ponavljajmo ovaj postupak. Tvrdimo da se drugi slučaj može ponoviti najviše $16/\eta^8$ puta i nakon toga završavamo u prvom slučaju. Zaista, uvjetno očekivanje od X nad bilo kojom podalgebrom uvijek poprima vrijednosti u intervalu $[0,1]$ pa je

$$\|\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1^i \otimes \mathcal{G}_2^i)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)} \leq 1 \tag{9}$$

za svaki indeks i. Kod svake primjene koraka iz drugog slučaja veličina s lijeve strane od (9) se povećava barem za $\eta^8/16$. Kad bi se drugi slučaj mogao ponoviti više od $16/\eta^8$ puta, tada bi ta veličina premašila broj 1. □

Čitatelj će sada lako riješiti zadatak 3.2, koristeći samo lemu 3.3.

3.3 Dokazi teoremâ o regularnosti

Sada se vraćamo na dokaze teorema 3.1 i 3.2.

Dokaz teorema 3.1. Premda je već lema 3.3 bila dobivena višestrukom primjenom leme 3.2, još bolji rezultat daje njeno daljnje iteriranje. Konstruirat ćemo dva rastuća niza konačnih podalgebri, $(\mathcal{G}_1^i)_{i=0}^\infty$ i $(\mathcal{G}_2^i)_{i=0}^\infty$, pri čemu će $\mathcal{G}_1^i$ i $\mathcal{G}_2^i$ imati složenost najviše m_i.

Stavimo $\mathcal{G}_1^0 := \{\emptyset, \Omega_1\}$ i $\mathcal{G}_2^0 := \{\emptyset, \Omega_2\}$ i prisjetimo se da su one, po definiciji, složenosti 0. Pretpostavimo da smo već definirali konačne podalgebre $\mathcal{G}_1^i$ i $\mathcal{G}_2^i$ složenosti najviše m_i za neki indeks $i \geq 0$. Iskoristimo lemu 3.3 uz $\eta = F(m_i)^{-1}$ kako bismo dobili njihova proširenja $\mathcal{G}_1^{i+1}$ i $\mathcal{G}_2^{i+1}$ složenosti najviše $m_i + 16F(m_i)^8$, što je po konstrukciji niza jednako m_{i+1}, takve da vrijedi

$$\|X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1^{i+1} \otimes \mathcal{G}_2^{i+1})\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)} < F(m_i)^{-1}. \tag{10}$$

Opet vrijedi (9) pa iz zadatka 2.4(b) i Pitagorinog poučka dobivamo

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left\|\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1^{i+1} \otimes \mathcal{G}_2^{i+1}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1^i \otimes \mathcal{G}_2^i)\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)} \leq 1.$$

Najviše $\lfloor \varepsilon^{-2} \rfloor$ pribrojnika iz gornje sume može biti veće ili jednako ε^2. Dakle, postoji indeks $0 \leq k \leq \lfloor \varepsilon^{-2} \rfloor$ takav da je

$$\|\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1^{k+1} \otimes \mathcal{G}_2^{k+1}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1^k \otimes \mathcal{G}_2^k)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)} < \varepsilon. \tag{11}$$

Sada je dovoljno uzeti $\mathcal{G}_1 := \mathcal{G}_1^k$, $\mathcal{G}_2 := \mathcal{G}_2^k$ te

$$\begin{aligned}
X_{\mathrm{st}} &:= \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1^k \otimes \mathcal{G}_2^k),\\
X_{\mathrm{ps}} &:= X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1^{k+1} \otimes \mathcal{G}_2^{k+1}),\\
X_{\mathrm{gr}} &:= \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1^{k+1} \otimes \mathcal{G}_2^{k+1}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1^k \otimes \mathcal{G}_2^k),
\end{aligned}$$

čime dobivamo željenu dekompoziciju. Naime, uz (10) i (11) primijetimo da X_{st} i $X_{\mathrm{st}} + X_{\mathrm{gr}} = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1^{k+1} \otimes \mathcal{G}_2^{k+1})$ poprimaju samo vrijednosti između 0 i 1, jer slučajna varijabla X po pretpostavci smije poprimiti samo takve vrijednosti; pogledajte zadatak 2.3(a). $\square$

Dokaz drugog teorema je sličan pa ćemo biti ponešto šturi.

Dokaz teorema 3.2. Ovaj put konstruirat ćemo tri rastuća niza, $(\mathcal{G}_1^i)_{i=0}^\infty$, $(\mathcal{G}_2^i)_{i=0}^\infty$, $(\mathcal{G}_3^i)_{i=0}^\infty$, konačnih podalgebri od $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$. Za početnu trojku $\mathcal{G}_1^0$, $\mathcal{G}_2^0$, $\mathcal{G}_3^0$ ponovno uzimamo trivijalne algebre. U i-tom koraku krećemo od podalgebri $\mathcal{G}_1^{2i}$, $\mathcal{G}_2^{2i}$, $\mathcal{G}_3^{2i}$ složenosti najviše m_i za neki indeks $i \geq 0$. Primijenimo lemu 3.3 na slučajnu varijablu X i konstantu $\eta = F(m_i)^{-1}$ te povećajmo podalgebre $\mathcal{G}_1^{2i}$ i $\mathcal{G}_2^{2i}$ do podalgebri $\mathcal{G}_1^{2i+1}$ i $\mathcal{G}_2^{2i+1}$ takvih da vrijedi

$$\|X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1^{2i+1} \otimes \mathcal{G}_2^{2i+1})\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)} < F(m_i)^{-1}$$

i da su njihove složenosti najviše $m_i + 16F(m_i)^8$. Primijenimo ponovno lemu 3.3 na slučajnu varijablu Y i povećajmo $\mathcal{G}_2^{2i+1}$ i $\mathcal{G}_3^{2i}$ do podalgebri $\mathcal{G}_2^{2i+2}$ i $\mathcal{G}_3^{2i+1}$ takvih da je

$$\|Y - \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_2^{2i+2} \otimes \mathcal{G}_3^{2i+1})\|_{\square^2(\Omega_2\times\Omega_3)} < F(m_i)^{-1},$$

pri čemu je složenost od $\mathcal{G}_2^{2i+2}$ najviše $m_i + 32F(m_i)^8 = m_{i+1}$, a složenost od $\mathcal{G}_3^{2i+1}$ najviše $m_i + 16F(m_i)^8$. Primijenimo lemu 3.3 još i na slučajnu varijablu Z i povećajmo $\mathcal{G}_1^{2i+1}$ i $\mathcal{G}_3^{2i+1}$ do podalgebri $\mathcal{G}_1^{2i+2}$ i $\mathcal{G}_3^{2i+2}$ složenosti najviše m_{i+1} takvih da je

$$\|Z - \mathbb{E}(Z|\mathcal{G}_3^{2i+2} \otimes \mathcal{G}_1^{2i+2})\|_{\square^2(\Omega_3\times\Omega_1)} < F(m_i)^{-1}.$$

Ovime smo gotovi s konstrukcijom nizova.

Za bilo koji indeks i promotrimo:

$$\begin{aligned}
&X_{\mathrm{st}}^i := \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1^{2i} \otimes \mathcal{G}_2^{2i}), \quad X_{\mathrm{ps}}^i := X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1^{2i+1} \otimes \mathcal{G}_2^{2i+1}),\\
&X_{\mathrm{gr}}^i := \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1^{2i+1} \otimes \mathcal{G}_2^{2i+1}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1^{2i} \otimes \mathcal{G}_2^{2i}),\\
&Y_{\mathrm{st}}^i := \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_2^{2i} \otimes \mathcal{G}_3^{2i}), \quad Y_{\mathrm{ps}}^i := Y - \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_2^{2i+2} \otimes \mathcal{G}_3^{2i+1}),\\
&Y_{\mathrm{gr}}^i := \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_2^{2i+2} \otimes \mathcal{G}_3^{2i+1}) - \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_2^{2i} \otimes \mathcal{G}_3^{2i}),\\
&Z_{\mathrm{st}}^i := \mathbb{E}(Z|\mathcal{G}_3^{2i} \otimes \mathcal{G}_1^{2i}), \quad Z_{\mathrm{ps}}^i := Z - \mathbb{E}(Z|\mathcal{G}_3^{2i+2} \otimes \mathcal{G}_1^{2i+2}),\\
&Z_{\mathrm{gr}}^i := \mathbb{E}(Z|\mathcal{G}_3^{2i+2} \otimes \mathcal{G}_1^{2i+2}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_3^{2i} \otimes \mathcal{G}_1^{2i}).
\end{aligned}$$

Ovaj put lako vidimo nejednakost

$$\sum_{i=0}^{\infty}\big(\|X^i_{\mathrm{gr}}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)}+\|Y^i_{\mathrm{gr}}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_2\times\Omega_3)}+\|Z^i_{\mathrm{gr}}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_3\times\Omega_1)}\big)\leq 3$$

pa možemo naći indeks $0\leq k\leq\lfloor 3\varepsilon^{-2}\rfloor$ takav da je

$$\|X^k_{\mathrm{gr}}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)}<\varepsilon,\quad \|Y^k_{\mathrm{gr}}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_2\times\Omega_3)}<\varepsilon,\quad \|Z^k_{\mathrm{gr}}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_3\times\Omega_1)}<\varepsilon.$$

Upravo za taj indeks k dobivamo dekompoziciju koju trebamo. □

4 Vjerojatnosno uklanjanje trokutâ

Kako bismo iskazali vjerojatnosnu formulaciju leme 1.1, definirajmo formu Λ tako da za ograničene slučajne varijable

$$X\colon \Omega_1\times\Omega_2\to\mathbb{R},\quad Y\colon \Omega_2\times\Omega_3\to\mathbb{R},\quad Z\colon \Omega_3\times\Omega_1\to\mathbb{R} \tag{12}$$

stavimo

$$\Lambda(X,Y,Z):=\mathbb{E}_{\omega_1\in\Omega_1,\omega_2\in\Omega_2,\omega_3\in\Omega_3}X(\omega_1,\omega_2)Y(\omega_2,\omega_3)Z(\omega_3,\omega_1).$$

Ta forma je *trilinearna*, tj. linearna u svakoj od triju slučajnih varijabli X,Y,Z.

Multilinearne forme često zadovoljavaju mnoge zanimljive ocjene. Čitatelju prepuštamo kao vježbu jednu takvu ocjenu, tzv. *Loomis-Whitneyevu nejednakost*, koja nam neće trebati u daljnjem tekstu.

Zadatak 4.1. Pokažite da vrijedi

$$|\Lambda(X,Y,Z)|\leq\|X\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)}\|Y\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_2\times\Omega_3)}\|Z\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_3\times\Omega_1)}.$$

4.1 Formulacija apstraktne tvrdnje

Iskazat ćemo apstraktni rezultat kojeg je logično zvati vjerojatnosnom formulacijom leme o uklanjanju trokutâ, iz razloga koji će uskoro postati jasni. Naime, vidjet ćemo kako je lema 1.1 zapravo njegov prikriveni posebni slučaj. S druge strane, glavni sastojak u njegovom dokazu bit će teorem o istovremenoj regularnosti, tj. teorem 3.2.

Teorem 4.1. *(Apstraktni teorem o uklanjanju trokutâ)* Za svaki $\delta>0$ postoji konstanta $\gamma(\delta)>0$ sa sljedećim svojstvom: ako su

$$X\colon \Omega_1\times\Omega_2\to[0,1],\quad Y\colon \Omega_2\times\Omega_3\to[0,1],\quad Z\colon \Omega_3\times\Omega_1\to[0,1]$$

slučajne varijable za koje je $\Lambda(X,Y,Z)<\gamma(\delta)$, tada postoje događaji $E_{1,2}\in\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2$, $E_{2,3}\in\mathcal{F}_2\otimes\mathcal{F}_3$, $E_{3,1}\in\mathcal{F}_3\otimes\mathcal{F}_1$ takvi da vrijedi

- $\mathbb{1}_{E_{1,2}}(\omega_1,\omega_2)\mathbb{1}_{E_{2,3}}(\omega_2,\omega_3)\mathbb{1}_{E_{3,1}}(\omega_3,\omega_1) = 0$ za sve $\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2, \omega_3 \in \Omega_3$,
- $\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{E_{1,2}^c}) + \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_{E_{2,3}^c}) + \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{E_{3,1}^c}) < \delta$.

Neformalno rečeno: *Ako je vrijednost forme Λ na X, Y, Z mala, tada malom modifikacijom tih slučajnih varijabli možemo dobiti slučajne varijable na kojima forma Λ iščezava.* Naime, $X\mathbb{1}_{E_{1,2}}$, $Y\mathbb{1}_{E_{2,3}}$ i $Z\mathbb{1}_{E_{3,1}}$ možemo shvatiti kao male modifikacije od X, Y i Z takve da je

$$\Lambda(X\mathbb{1}_{E_{1,2}}, Y\mathbb{1}_{E_{2,3}}, Z\mathbb{1}_{E_{3,1}}) = 0.$$

Ovaj put je tvrdnja trivijalna za $\delta > 3$, jer tada za $E_{1,2}, E_{2,3}, E_{3,1}$ možemo uzeti nemoguće događaje.

Dokaz leme 1.1 korištenjem teorema 4.1. Grafu $G = (V, E)$ s $|V| = n$ vrhova prirodno je pridružiti vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kod kojeg je $\Omega = V$, $\mathcal{F}$ čine svi podskupovi od V, a vjerojatnosna mjera je definirana sa $\mathbb{P}(S) := |S|/n$ za svaki $S \subseteq V$. Nadalje, slučajnu varijablu $X\colon \Omega \times \Omega \to \{0, 1\}$ definiramo formulom

$$X(u,v) := \begin{cases} 1 & \text{ako su vrhovi } u \text{ i } v \text{ spojeni bridom,} \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Primijetimo da je zbog (2) zapravo

$$\Lambda(X, X, X) = \frac{1}{n^3} \sum_{u,v,w \in V} X(u,v)X(v,w)X(w,u) = \frac{6 \cdot \text{broj trokutâ u } G}{n^3},$$

jer, u ovom posebnom slučaju, forma Λ u stvari broji trokute $\{u, v, w\}$ u grafu G, s tim da je svaki trokut uračunat $3! = 6$ puta.

Stavimo $\beta(\delta) := \gamma(\delta)/6$. Pretpostavka da graf G sadrži manje od $\beta(\delta)n^3$ trokutâ se sada može zapisati $\Lambda(X, X, X) < \gamma(\delta)$. Primjenom teorema 4.1 nalazimo podskupove $E_{1,2}$, $E_{2,3}$, $E_{3,1}$ od $V \times V$ takve da je

$$\mathbb{1}_{E_{1,2}}(u,v)\mathbb{1}_{E_{2,3}}(v,w)\mathbb{1}_{E_{3,1}}(w,u) = 0 \ \text{ za sve } u, v, w \in V \tag{13}$$

i da vrijedi

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{u,v \in V \\ (u,v) \in E_{1,2}^c}} X(u,v) + \sum_{\substack{u,v \in V \\ (u,v) \in E_{2,3}^c}} X(u,v) + \sum_{\substack{u,v \in V \\ (u,v) \in E_{3,1}^c}} X(u,v) \\ &= \big(\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{E_{1,2}^c}) + \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{E_{2,3}^c}) + \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{E_{3,1}^c})\big)\, n^2 < \delta n^2. \end{aligned}$$

Izbacit ćemo sve bridove $\{u,v\} \in E$ takve da se (u,v) ili (v,u) nalazi u barem jednom od skupova $E^c_{1,2}$, $E^c_{2,3}$ i $E^c_{3,1}$. Iz gornjeg vidimo da smo na taj način izbacili manje od δn^2 bridova. Preostali su bridovi $\{u,v\} \in E$ za koje vrijedi

$$\{(u,v),(v,u)\} \subseteq E_{1,2} \cap E_{2,3} \cap E_{3,1},$$

ali radi (13) nikoja tri od njih ne mogu određivati trokut. □

4.2 Dokaz apstraktne tvrdnje

Važno svojstvo forme Λ je da ju možemo kontrolirati pravokutnom normom bilo koje od triju slučajnih varijabli.

Lema 4.1. *Ako su X, Y, Z slučajne varijable kao u* (12) *s vrijednostima u* $[-1,1]$*, tada vrijedi ocjena*

$$|\Lambda(X,Y,Z)| \leq \min\{\|X\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)}, \|Y\|_{\square^2(\Omega_2\times\Omega_3)}, \|Z\|_{\square^2(\Omega_3\times\Omega_1)}\}. \quad (14)$$

Dokaz. Koristeći $|Y|, |Z| \leq 1$ i nejednakost iz zadatka 2.5(b), možemo pisati:

$$\begin{aligned}
&|\Lambda(X,Y,Z)| \leq \mathbb{E}_{\omega_1\in\Omega_1,\omega_2\in\Omega_2,\omega_3\in\Omega_3}|X(\omega_1,\omega_2)||Y(\omega_2,\omega_3)||Z(\omega_3,\omega_1)| \\
&\leq \mathbb{E}_{\omega_1\in\Omega_1,\omega_2\in\Omega_2}|X(\omega_1,\omega_2)| \\
&= \mathbb{E}_{\omega_1,\omega_1'\in\Omega_1,\omega_2,\omega_2'\in\Omega_2}|X(\omega_1,\omega_2)|\mathbb{1}(\omega_1,\omega_2')\mathbb{1}(\omega_1',\omega_2)\mathbb{1}(\omega_1',\omega_2') \\
&\leq \|X\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)}\|\mathbb{1}\|^3_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)} = \|X\|_{\square^2(\Omega_1\times\Omega_2)},
\end{aligned}$$

pri čemu je $\mathbb{1}$ konstantna funkcija jednaka 1 na cijelom produktnom prostoru $\Omega_1 \times \Omega_2$. Isti račun možemo provesti zamijenivši ulogu od X slučajnim varijablama Y i Z pa preostaje kombinirati tri tako dobivene nejednakosti. □

Konačno imamo sve pripremljeno za dokaz teorema iz ovog odjeljka. Iznosimo ga prema preglednom radu [18].

Dokaz teorema 4.1. Koristimo teorem 3.2, ali zasad nećemo precizirati funkciju F i parametar ε iz iskaza tog teorema, već ćemo ih prikladno odabrati tek na kraju dokaza. Primijenimo ga na slučajne varijable X, Y, Z, tako da za neki $0 \leq k \leq \lfloor 3\varepsilon^{-2} \rfloor$ dobijemo podalgebre $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ složenosti najviše m_k i rastave (6) sa svojstvima iz iskaza. Ovdje je $(m_i)_{i=0}^{\infty}$ niz definiran pomoću funkcije F rekurzivnom formulom (5). U daljnjem tekstu pisat ćemo m umjesto m_k, a primijetimo i da je

$$m \leq M(F,\varepsilon), \quad (15)$$

pri čemu smo označili $M(F,\varepsilon) := m_{\lfloor 3\varepsilon^{-2}\rfloor}$. Prisjetimo se još nejednakosti (3) i (4), a analogne ograde vrijede i za dijelove iz rastava slučajnih varijabli Y i Z.

Krećemo od pretpostavke

$$\Lambda(X_{\mathrm{st}}+X_{\mathrm{gr}}+X_{\mathrm{ps}},\, Y_{\mathrm{st}}+Y_{\mathrm{gr}}+Y_{\mathrm{ps}},\, Z_{\mathrm{st}}+Z_{\mathrm{gr}}+Z_{\mathrm{ps}}) < \gamma, \tag{16}$$

a kasnije ćemo za fiksirani $\delta > 0$ iz iskaza izabrati $\gamma = \gamma(\delta)$. Osnovna ideja je najprije ukloniti $X_{\mathrm{ps}}, Y_{\mathrm{ps}}, Z_{\mathrm{ps}}$, a potom i $X_{\mathrm{gr}}, Y_{\mathrm{gr}}, Z_{\mathrm{gr}}$ iz ocjene (16). Kada nam ostanu samo strukturirani dijelovi $X_{\mathrm{st}}, Y_{\mathrm{st}}, Z_{\mathrm{st}}$, sjetit ćemo se da su oni izmjerivi obzirom na podalgebre s kontroliranim brojem atoma pa ćemo korisne ocjene dobiti samo na temelju njihovog prebrojavanja. Pritom ćemo morati biti pažljivi i neke od argumenata primijeniti lokalno, tj. samo na pažljivo odabranim događajima.

Utjecaj pseudoslučajnih dijelova na formu Λ možemo ocijeniti pomoću leme 4.1. Korištenjem trilinearnosti forme Λ i ocjena za pravokutnu normu od $X_{\mathrm{ps}}, Y_{\mathrm{ps}}, Z_{\mathrm{ps}}$, iz (14) i (16) lako dobijemo

$$\Lambda(X_{\mathrm{st}}+X_{\mathrm{gr}}, Y_{\mathrm{st}}+Y_{\mathrm{gr}}, Z_{\mathrm{st}}+Z_{\mathrm{gr}}) \le \gamma + 3F(m)^{-1}. \tag{17}$$

Nadalje, definirajmo događaje $D_{1,2}$, $D_{2,3}$ i $D_{3,1}$ s

$$\begin{aligned}
D_{1,2} &:= \big\{X_{\mathrm{st}} \ge \varepsilon^{1/10},\, \mathbb{E}(X_{\mathrm{gr}}^2|\mathcal{G}_1\otimes\mathcal{G}_2) \le \varepsilon\big\} \in \mathcal{G}_1\otimes\mathcal{G}_2,\\
D_{2,3} &:= \big\{Y_{\mathrm{st}} \ge \varepsilon^{1/10},\, \mathbb{E}(Y_{\mathrm{gr}}^2|\mathcal{G}_2\otimes\mathcal{G}_3) \le \varepsilon\big\} \in \mathcal{G}_2\otimes\mathcal{G}_3,\\
D_{3,1} &:= \big\{Z_{\mathrm{st}} \ge \varepsilon^{1/10},\, \mathbb{E}(Z_{\mathrm{gr}}^2|\mathcal{G}_3\otimes\mathcal{G}_1) \le \varepsilon\big\} \in \mathcal{G}_3\otimes\mathcal{G}_1.
\end{aligned}$$

Pokažimo da je X mala izvan $D_{1,2}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{D_{1,2}^c}) &= \mathbb{E}(X_{\mathrm{st}}\mathbb{1}_{D_{1,2}^c}) \le \mathbb{E}(X_{\mathrm{st}}\mathbb{1}_{\{X_{\mathrm{st}}<\varepsilon^{1/10}\}}) + \mathbb{E}(X_{\mathrm{st}}\mathbb{1}_{\{\mathbb{E}(X_{\mathrm{gr}}^2|\mathcal{G}_1\otimes\mathcal{G}_2)>\varepsilon\}})\\
&\le \varepsilon^{1/10}\mathbb{E}\mathbb{1}_{\Omega_1\times\Omega_2} + \mathbb{P}\big(\{\mathbb{E}(X_{\mathrm{gr}}^2|\mathcal{G}_1\otimes\mathcal{G}_2)>\varepsilon\}\big)\\
&\le \varepsilon^{1/10} + \varepsilon^{-1}\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X_{\mathrm{gr}}^2|\mathcal{G}_1\otimes\mathcal{G}_2)\big)\\
&= \varepsilon^{1/10} + \varepsilon^{-1}\|X_{\mathrm{gr}}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_1\times\Omega_2)}^2 \le \varepsilon^{1/10} + \varepsilon^{-1}\varepsilon^2 \le 2\varepsilon^{1/10}.
\end{aligned}$$

Pritom smo redom koristili činjenicu $D_{1,2}^c \in \mathcal{G}_1\otimes\mathcal{G}_2$, zadatak 2.3(b), zadatak 2.2(a) i potom ponovno zadatak 2.3(b), a zadnja nejednakost vrijedi čim je $0 < \varepsilon \le 1$. Potpuno analogno postupamo s Y i Z pa imamo ocjene

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{D_{1,2}^c}),\, \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_{D_{2,3}^c}),\, \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{D_{3,1}^c}) \le 2\varepsilon^{1/10}. \tag{18}$$

Uzmimo bilo koja tri atoma A, B i C u $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ i $\mathcal{G}_3$ takva da je

$$A\times B \subseteq D_{1,2}, \quad B\times C \subseteq D_{2,3}, \quad C\times A \subseteq D_{3,1}. \tag{19}$$

Izraz

$$\Lambda\big((X_{\mathrm{st}}+X_{\mathrm{gr}})\mathbb{1}_{A\times B},(Y_{\mathrm{st}}+Y_{\mathrm{gr}})\mathbb{1}_{B\times C},(Z_{\mathrm{st}}+Z_{\mathrm{gr}})\mathbb{1}_{C\times A}\big) \tag{20}$$

možemo, zahvaljujući trilinearnosti, razdvojiti na zbroj glavnog člana

$$\Lambda\big(X_{\mathrm{st}}\mathbb{1}_{A\times B},Y_{\mathrm{st}}\mathbb{1}_{B\times C},Z_{\mathrm{st}}\mathbb{1}_{C\times A}\big) \tag{21}$$

i ostalih članova, koje po apsolutnoj vrijednosti možemo ocijeniti s

$$\begin{aligned}\Lambda(|X_{\mathrm{gr}}|\mathbb{1}_{A\times B},\mathbb{1}_{B\times C},\mathbb{1}_{C\times A})&+\Lambda(\mathbb{1}_{A\times B},|Y_{\mathrm{gr}}|\mathbb{1}_{B\times C},\mathbb{1}_{C\times A})\\&+\Lambda(\mathbb{1}_{A\times B},\mathbb{1}_{B\times C},|Z_{\mathrm{gr}}|\mathbb{1}_{C\times A}).\end{aligned} \tag{22}$$

Na događajima $D_{1,2},D_{2,3},D_{3,1}$ su redom slučajne varijable $X_{\mathrm{st}},Y_{\mathrm{st}},Z_{\mathrm{st}}$ veće ili jednake $\varepsilon^{1/10}$ pa imamo donju ogradu na glavni član,

$$\Lambda\big(X_{\mathrm{st}}\mathbb{1}_{A\times B},Y_{\mathrm{st}}\mathbb{1}_{B\times C},Z_{\mathrm{st}}\mathbb{1}_{C\times A}\big)\geq\varepsilon^{3/10}\Lambda\big(\mathbb{1}_{A\times B},\mathbb{1}_{B\times C},\mathbb{1}_{C\times A}\big). \tag{23}$$

Nadalje, znamo da na događaju $A\times B\subseteq D_{1,2}$ vrijedi $\mathbb{E}(X_{\mathrm{gr}}^2|\mathcal{G}_1\otimes\mathcal{G}_2)\leq\varepsilon$ pa primjenom Cauchy-Schwarzove nejednakosti, činjenice $A\times B\in\mathcal{G}_1\otimes\mathcal{G}_2$ i zadatka 2.3(b) dobivamo gornju ogradu

$$\begin{aligned}&\Lambda(|X_{\mathrm{gr}}|\mathbb{1}_{A\times B},\mathbb{1}_{B\times C},\mathbb{1}_{C\times A})\\&=\mathbb{E}_{\omega_1\in\Omega_1,\omega_2\in\Omega_2,\omega_3\in\Omega_3}\big(|X_{\mathrm{gr}}(\omega_1,\omega_2)|\mathbb{1}_A(\omega_1)\mathbb{1}_B(\omega_2)\mathbb{1}_C(\omega_3)\big)\\&=\mathbb{E}(|X_{\mathrm{gr}}|\mathbb{1}_{A\times B})\,\mathbb{P}(C)\leq\big(\mathbb{E}(X_{\mathrm{gr}}^2\mathbb{1}_{A\times B})\big)^{1/2}(\mathbb{E}\mathbb{1}_{A\times B})^{1/2}\mathbb{P}(C)\\&=\big(\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X_{\mathrm{gr}}^2|\mathcal{G}_1\otimes\mathcal{G}_2)\mathbb{1}_{A\times B}\big)\big)^{1/2}\big(\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\big)^{1/2}\mathbb{P}(C)\\&\leq\varepsilon^{1/2}\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)=\varepsilon^{1/2}\Lambda(\mathbb{1}_{A\times B},\mathbb{1}_{B\times C},\mathbb{1}_{C\times A}),\end{aligned} \tag{24}$$

a analogne ocjene vrijede i za preostala dva pribrojnika iz (22). Nejednakosti (23) i (24) ocjenjuju (22) odozgo sa

$$3\varepsilon^{1/5}\Lambda(X_{\mathrm{st}}\mathbb{1}_{A\times B},Y_{\mathrm{st}}\mathbb{1}_{B\times C},Z_{\mathrm{st}}\mathbb{1}_{C\times A}).$$

Dakle, (20) se od glavnog člana (21) razlikuje najviše za udio $3\varepsilon^{1/5}$ od (21) pa, ako je $3\varepsilon^{1/5}\leq 1/2$, tj. $\varepsilon\leq 6^{-5}$, tada dobivamo

$$\begin{aligned}&\Lambda(X_{\mathrm{st}}\mathbb{1}_{A\times B},Y_{\mathrm{st}}\mathbb{1}_{B\times C},Z_{\mathrm{st}}\mathbb{1}_{C\times A})\\&\leq 2\Lambda((X_{\mathrm{st}}+X_{\mathrm{gr}})\mathbb{1}_{A\times B},(Y_{\mathrm{st}}+Y_{\mathrm{gr}})\mathbb{1}_{B\times C},(Z_{\mathrm{st}}+Z_{\mathrm{gr}})\mathbb{1}_{C\times A}).\end{aligned}$$

Zbrajajući po svim atomima A,B,C za koje vrijedi (19) i uzimajući u obzir nejednakost (17) zaključujemo da vrijedi

$$\Lambda(X_{\mathrm{st}}\mathbb{1}_{D_{1,2}},Y_{\mathrm{st}}\mathbb{1}_{D_{2,3}},Z_{\mathrm{st}}\mathbb{1}_{D_{3,1}})\leq 2\gamma+6F(m)^{-1}. \tag{25}$$

Naime, događaje $D_{1,2}, D_{2,3}, D_{3,1}$ redom rastavimo na produktne atome $A \times B', B \times C', C \times A'$, iskoristimo trilinearnost od Λ na lijevoj strani od (25) te uočimo da dobiveni pribrojnici

$$\Lambda(X_{\mathrm{st}} \mathbb{1}_{A\times B'}, Y_{\mathrm{st}} \mathbb{1}_{B\times C'}, Z_{\mathrm{st}} \mathbb{1}_{C\times A'})$$

iščezavaju osim kad je $A' = A$, $B' = B$, $C' = C$, a po konstrukciji za njih mora vrijediti i (19). Iz (25) i definicija od $D_{1,2}, D_{2,3}, D_{3,1}$ odmah dobivamo ocjenu

$$\Lambda(\mathbb{1}_{D_{1,2}}, \mathbb{1}_{D_{2,3}}, \mathbb{1}_{D_{3,1}}) \leq 2\varepsilon^{-3/10}\gamma + 6\varepsilon^{-3/10}F(m)^{-1}. \tag{26}$$

Definirajmo sada $E_{1,2}$ kao podskup od $D_{1,2}$ koji je jednak uniji svih produkata $A \times B \subseteq D_{1,2}$ za neke atome $A \in \mathcal{G}_1$ i $B \in \mathcal{G}_2$ takve da su $\mathbb{P}_1(A)$ i $\mathbb{P}_2(B)$ barem $2^{-m}\varepsilon$. Ostatak skupa $D_{1,2}$ ima malu vjerojatnost. Zaista, unija svih atoma iz $\mathcal{G}_1$ vjerojatnosti manje od $2^{-m}\varepsilon$ ima vjerojatnost manju od ε jer $\mathcal{G}_1$ ukupno ima najviše 2^m atoma. Isto tako i unija svih atoma iz $\mathcal{G}_2$ vjerojatnosti manje od $2^{-m}\varepsilon$ ima vjerojatnost manju od ε. Prema tome, uniranje po svim pripadnim atomima od $\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$ daje

$$(\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2)(D_{1,2} \setminus E_{1,2}) \leq 2\varepsilon.$$

Analogno definiramo $E_{2,3}$ i $E_{3,1}$ te slično ocjenjujemo vjerojatnosti skupovnih razlika $D_{2,3} \setminus E_{2,3}$ i $D_{3,1} \setminus E_{3,1}$. Kombinirajući to s nejednakošću (18), vidimo da za $\varepsilon \leq 6^{-5} < 1$ svakako imamo

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{E^c_{1,2}}) + \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_{E^c_{2,3}}) + \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{E^c_{3,1}}) < 12\varepsilon^{1/10}. \tag{27}$$

Za fiksirani $\delta > 0$ odabiremo

$$\varepsilon := \min\{6^{-5}, (\delta/12)^{10}\}, \tag{28}$$

tako da je $12\varepsilon^{1/10} \leq \delta$ pa je radi (27) zadovoljen drugi uvjet iz iskaza teorema. Pretpostavimo sada da funkcija

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mapsto \mathbb{1}_{E_{1,2}}(\omega_1, \omega_2)\mathbb{1}_{E_{2,3}}(\omega_2, \omega_3)\mathbb{1}_{E_{3,1}}(\omega_3, \omega_1)$$

nije identički jednaka 0. Tada postoje atomi $A \in \mathcal{G}_1$, $B \in \mathcal{G}_2$ i $C \in \mathcal{G}_3$ za koje je

$$\mathbb{P}_1(A), \mathbb{P}_2(B), \mathbb{P}_3(C) \geq 2^{-m}\varepsilon \tag{29}$$

i

$$A \times B \subseteq E_{1,2} \subseteq D_{1,2}, \quad B \times C \subseteq E_{2,3} \subseteq D_{2,3}, \quad C \times A \subseteq E_{3,1} \subseteq D_{3,1}. \tag{30}$$

S jedne strane, iz (26) i (30) uz $\varepsilon \le 6^{-5}$ slijedi

$$\Lambda(\mathbb{1}_{A\times B}, \mathbb{1}_{B\times C}, \mathbb{1}_{C\times A}) < \varepsilon^{-1}\gamma + \frac{1}{2}\varepsilon^{-1}F(m)^{-1}, \tag{31}$$

dok s druge strane iz (29) dobivamo

$$\Lambda(\mathbb{1}_{A\times B}, \mathbb{1}_{B\times C}, \mathbb{1}_{C\times A}) = \mathbb{P}_1(A)\mathbb{P}_2(B)\mathbb{P}_3(C) \ge (2^{-m}\varepsilon)^3. \tag{32}$$

Odgodimo još malo odabir od γ, a funkciju F definirajmo formulom

$$F(n) := \lceil 2^{3n}\varepsilon^{-4} \rceil, \tag{33}$$

tako da kombiniranje (31) i (32) daje

$$2^{-3m}\varepsilon^3 < \varepsilon^{-1}\gamma + 2^{-3m-1}\varepsilon^3, \quad \text{tj.} \quad 2^{-3m-1}\varepsilon^4 < \gamma.$$

Uvažavajući već komentiranu grubu ogradu (15), kontradikciju ćemo dobiti ako definiramo

$$\gamma = \gamma(\delta) := 2^{-3M(F,\varepsilon)-1}\varepsilon^4,$$

pri čemu su ε i F redom dani sa (28) i (33). Time zaključujemo da je zadovoljen i prvi uvjet na skupove $E_{1,2}, E_{2,3}, E_{3,1}$ iz iskaza teorema. $\square$

5 Zaključak

Najapstraktniji rezultati ovog članka su svakako vjerojatnosne formulacije Szemerédijeve leme o regularnosti, teoremi 3.1 i 3.2. U raznim matematičkim granama moguće je dobiti rezultate koji rastavljaju općeniti objekt na strukturirani dio, pseudoslučajni dio i grešku, a same definicije tih dijelova mogu biti prilagođene kontekstu pojedinog problema. U diplomskom radu prvog autora [3] mogu se naći još dvije varijante leme o regularnosti, u Fourierovoj analizi i u funkcionalnoj analizi, kao i njihove usporedbe s vjerojatnosnom formulacijom. T. Tao u predavanju [17] iznosi svojevrsne filozofske diskusije o istoj ideji u još raznovrsnijim matematičkim situacijama.

Kao što smo vidjeli, teorem 3.2 je glavni sastojak u dokazu vjerojatnosne formulacije leme o uklanjanju trokutâ, teorema 4.1. Nadalje, iz tog teorema slijedi lema 1.1, a iz nje se pak izvode teoremi 1.1–1.3. Na taj način smo jezikom teorije vjerojatnosti dokazali jednu zanimljivu tvrdnju o neusmjerenim grafovima, u koju se mogu ukodirati dva poznata teorema aditivne kombinatorike: Rothov teorem o aritmetičkim progresijama i teorem o uglovima. Njih je moguće dokazati i čisto kombinatornim tehnikama (kao u [1], [9], [13], [14]), korištenjem Fourierove analize (kao u [2], [8], [16]), ili pomoću ergodičke teorije (kao u [5]). Pojedini dokazi im imaju specifične prednosti, npr. da su kvantitativni ili da se lakše poopćuju. Ipak, nijedan dokaz nije značajno jednostavniji od ovdje navedenog, što samo svjedoči o netrivijalnosti i zanimljivosti tih rezultata.

Autori zahvaljuju Rudiju Mrazoviću i Luki Rimaniću na novostima u vezi još neobjavljenog rezultata T. F. Blooma i O. Sisaska.

Literatura

[1] M. Ajtai, E. Szemerédi, *Sets of lattice points that form no squares*, Stud. Sci. Math. Hungar. **9** (1974), 9–11.

[2] T. F. Bloom, *A quantitative improvement for Roth's theorem on arithmetic progressions*, J. Lond. Math. Soc. (2) **93** (2016), no. 3, 643–663.

[3] F. Bosnić, *Vjerojatnosne i funkcionalne varijante Szemerédijeve leme o regularnosti*, diplomski rad, PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2016.

[4] P. Erdős, P. Turán, *On Some Sequences of Integers*, J. London Math. Soc. **11** (1936), no. 4, 261–264.

[5] H. Furstenberg, Y. Katznelson, *An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations*, J. Anal. Math. **38** (1978), no. 1, 275–291.

[6] B. J. Green, T. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Ann. of Math. (2) **167** (2008), no. 2, 481–547.

[7] Y. Lima, *Szemerédi's regularity lemma*, `https://www.math.u-psud.fr/~ylima/szemeredi_regularity_lemma.pdf`, 2012.

[8] K. F. Roth, *On certain sets of integers*, J. London Math. Soc. **28** (1953), 104–109.

[9] I. Z. Ruzsa, E. Szemerédi, *Triple systems with no six points carrying three triangles*, Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976), Vol. II, 939–945, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 18, North-Holland, Amsterdam-New York, 1978.

[10] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, drugo izdanje, Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[11] N. Sarapa, *Vjerojatnost i statistika: I. dio: osnove vjerojatnosti, kombinatorika*, Školska knjiga, Zagreb, 1993.

[12] N. Sarapa, *Vjerojatnost i statistika: II. dio: osnove statistike, slučajne varijable*, Školska knjiga, Zagreb, 1996.

[13] J. Solymosi, *Note on a generalization of Roth's theorem*, Discrete and computational geometry, 825–827, Algorithms Combin. **25**, Springer, Berlin, 2003.

[14] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith. **27** (1975), 199–245.

[15] E. Szemerédi, *Regular partitions of graphs*, Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976), pp. 399–401, Colloq. Internat. CNRS **260**, CNRS, Paris, 1978.

[16] I. D. Škredov, *On a generalization of Szemerédi's theorem*, Proc. London Math. Soc. (3) **93** (2006), no. 3, 723–760.

[17] T. Tao, *The dichotomy between structure and randomness, arithmetic progressions, and the primes*, International Congress of Mathematicians. Vol. I, 581–608, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.

[18] T. Tao, *The ergodic and combinatorial approaches to Szemerédi's theorem*, Additive combinatorics, 145–193, CRM Proc. Lecture Notes **43**, Amer. Math. Soc., Providence, 2007.

[19] T. Tao, V. Vu, *Additive combinatorics*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **105**, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[20] P. Varnavides, *On certain sets of positive density*, J. London Math. Soc. **34** (1959), 358–360.